На правах рукописи

ЗАДВОРНОВ Олег Анатольевич

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННЫХ И КВАЗИВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ И ТЕОРИИ МЯГКИХ ОБОЛОЧЕК

01.01.07 – вычислительная математика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

КАЗАНЬ – 2007

Работа выполнена в
государственном образовательном учреждении
высшего профессионального образования
"Казанский государственный университет им. В.И. Ульянова-Ленина"

Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор *Вабищевич Петр Николаевич,*
	доктор физико-математических наук, профессор *Коннов Игорь Васильевич,*
	доктор физико-математических наук, профессор *Паймушин Виталий Николаевич.*
Ведущая организация:	Московский государственный университет им М.В. Ломоносова.

Защита состоится 26 апреля 2007 г. в 14 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.21 в Казанском государственном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская 18, корп. 2, ауд. 217.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского Казанского государственного университета

Автореферат разослан 25 марта 2007 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
д. ф.-м. н., профессор Е.М. Федотов

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Численные методы в настоящее время являются одними из наиболее употребляемых способов решения задач, возникающих в практических областях – механике, физике, экономике, биологии, медицине и т.д. Многие из этих задач сводятся к поиску минимума выпуклых функционалов на выпуклых множествах и эквивалентны вариационным неравенствам. В последние десятилетия разработаны эффективные способы решения таких неравенств на базе сеточных методов. Соответствующие аппроксимирующие задачи, как правило, решаются итерационными методами. Различные аспекты указанных выше методов освещены в многочисленных монографиях и обзорах. Значительная часть этих работ посвящена методам решения конечномерных задач. Вместе с тем, поскольку исходные задачи рассматриваются в функциональных пространствах, актуальным является исследование итерационных методов непосредственно в этих пространствах. Такой подход позволяет рассчитывать на равномерную, по параметру аппроксимации, сходимость итерационных алгоритмов.

Наряду с выпуклыми задачами, важную роль в приложениях играют и невыпуклые задачи. Необходимые условия существования решения задач минимизации на невыпуклых множествах могут быть сформулированы в виде квазивариационных неравенств. К таким же формулировкам приводят и непотенциальные задачи механики и математической физики со связями, порождающими невыпуклые множества ограничений. Теория численных методов решения квазивариационных неравенств в настоящее время является актуальной и интенсивно развивается.

Вариационные и квазивариационные неравенства возникают, в частности, при моделировании задач с ограничениями в теории мягких оболочек, характерной особенностью которых является допущение о конечных перемещениях и деформациях, что, наряду с наличием препятствия произвольной формы, приводит к невыпуклым задачам. С практической точки зрения важным классом являются задачи теории мягких сетчатых оболочек.

Другой областью, в которой возникают вариационные неравенства, являются задачи теории фильтрации несжимаемой жидкости, при моделировании которых широко используются нелинейные реологические соотношения (с предельным градиентом, многозначные законы), описываемые функциями с линейным ростом на бесконечности. Известные вариационные постановки, описывающие процессы фильтрации с такими законами, не позволяют охватить, тем не менее, важный, с точки зрения приложений, класс задач с точечными источниками, моделирующими скважины. Поэтому актуальным является исследование математических моделей задач фильтрации в случае произвольной ограниченной области со сосредоточенными источниками для указанных выше законов, построение и обоснование соответствующих приближенных методов.

Целью работы является теоретическое исследование вариационных и квазивариационных неравенств, возникающих при математическом моделировании стационарных задач теории мягких сетчатых оболочек и теории нелинейной фильтрации при наличии точечных источников, построение и исследование конечномерных аппроксимаций этих задач, конструирование и теоретическое обоснование сходимости итерационных методов решения вариационных и квазивариационных неравенств.

Методы исследования математических моделей и сходимости итерационных методов опираются на аппарат нелинейного функционального анализа, выпуклого анализа, теорию уравнений и вариационных неравенств с монотонными и псевдомонотонными операторами. При построении конечномерных аппроксимаций используется теория метода конечных элементов. Изучение сходимости сеточных схем опирается на получение априорных оценок для решений конечномерных задач.

Научная новизна работы. Предложены новые математические модели задач теории нелинейной фильтрации при наличии точечных источников и контактных задач теории мягких оболочек, проведено исследование их корректности. Построены и исследованы приближенные методы решения этих задач. Предложены и теоретически обоснованы новые итерационные методы решения вариационных и квазивариационных неравенств, возникающих, в частности, в указанных выше задачах.

Основные результаты диссертации:

1. Предложены итерационные методы с расщеплением для решения вариационных неравенств с операторами монотонного типа в гильбертовых пространствах, не требующие обращения операторов исходной задачи. Получены критерии сходимости этих итерационных методов, использующие параметры операторов вариационных неравенств.

2. Предложены итерационные методы решения квазивариационных неравенств с операторами монотонного типа в банаховых пространствах. Получены критерии сходимости этих итерационных методов, формулируемые в терминах исходных данных задач.

3. Предложены обобщенные постановки нелинейных стационарных задач фильтрации в произвольной ограниченной области при наличии точечных источников в виде вариационных неравенств. Доказаны теоремы существования обобщенных решений.

4. Предложены обобщенные постановки нелинейных задач теории мягких сетчатых оболочек при наличии препятствий в виде квазивариационных неравенств. Доказаны теоремы существования обобщенных решений.

5. Построены конечноэлементные аппроксимации для стационарных задач фильтрации с разрывным законом фильтрации с предельным градиентом при наличии точечных источников. Доказана сходимость и получены оценки точности.

6. Построены конечноэлементные аппроксимации для задач об определении положения равновесия мягких сетчатых оболочек, ограниченных в перемещении препятствиями. Доказана сходимость и получены оценки точности.

Практическая значимость. Результаты теоретических исследований и разработанные численные методы могут быть использованы при решении задач увеличения нефтеотдачи, при определении границ предельно-равновесных целиков остаточной вязко-пластичной нефти, при проектировании строительных и других конструкций, силовой основой которых являются армированные оболочки.

Достоверность научных результатов. Все результаты, полученные в диссертации подтверждены строгими математическими доказательствами, а также положительным сравнением результатов численных экспериментов с точными решениями для модельных задач.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на I – III Всероссийских семинарах "Теория сеточных методов для нелинейных краевых задач"(Казань, 24-28 июня 1996 г., 18-21 сентября 1998 г., 18-21 сентября 2000 г.), на Международной школе - конференции, посвященной 100-летию со дня рождения Б.М. Гагаева "Алгебра и анализ"(Казань, 16-22 июня 1997 г.), на VII – IX Всероссийской школе-семинаре "Современные проблемы математического моделирования"(Абрау-Дюрсо, 8-13 сентября 1997, 5-17 сентября 1999 г., 8-13 сентября 2001 г.), на Международной конференции "Математическое моделирование в науке и технике"(Ижевск 5-7 февраля 1998 г.), на Международных конференциях "Optimization of Finite Element Approximations"(С.-Петербург, 25-29 июня 1995 г., 25-29 июня 2001 г.), на научной конференции "Актуальные проблемы математического моделирования и информатики"(Казань, 30 января-06 февраля 2002 г.), на IV – VI Всероссийских семинарах "Сеточные методы для краевых задач и приложения"(Казань, 13-16 сентября 2002 г., 17-21 сентября 2004 г., 1-4 октября 2005 г.), на Всероссийской конференции, посвященной 70-летию со дня рождения акад. А.Ф.Сидорова (Екатеринбург, 3-7 февраля 2003 г.), на Воронежских весенних математических школах "Понтрягинские чтения - XIV", "Понтрягинские чтения - XV"(Воронеж , 3-9 мая 2003 г., 3-9 мая 2004 г.), на XII, XIII Международных конференциях по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (Владимир, 30 июня - 5 июля 2003 г., Алушта, Крым, 25-31 мая 2005 г.), на Международной конференции "Ломоносов-2004"(Москва, 10-13 апреля 2004 г.), Международной конференции по вычислительной математике МКВМ -2004 (Новосибирск, 21-25 июня 2004 г.), на Международной научной конференции "Актуальные проблемы математики и механики"(Казань, 27-30 сентября 2004 г.), на Minisymposium "Recent Advances in Multi-phase flow in porous media (Kazan, 24-26 August 2004), на Международной научной конференции "Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования"(Воронеж, 12-17 декабря 2005 г.), на III Международной научной конференции "Математические идеи П.Л. Чебышева и их приложения к современным проблемам естествознания"(Обнинск, 14-18 мая 2006 г.), на VII международной конференции "Дифференциальные уравнения и их приложения"(Саранск, 17-21 мая 2006 г.), на Международной научной конференции "Тихонов и современная математика"(Москва, 19-25 июня 2006 г.), на научной конференции "Теория управления и математическое моделирование"(Ижевск, 3-8 июля 2006 г.), на научных семинарах кафедры вычислительной математики Казанского государственного университета под руководством Ляшко А.Д., на итоговых научных конференциях Казанского государственного университета за 1997–2006 г.г.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 47 работ. Основные результаты опубликованы в работах [1-32], из которых 14 – в журналах, входящих в перечень ВАК Российской Федерации.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка литературы, содержащего 265 наименований. Общий объем работы составляет 244 страницы, включая 25 рисунков.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 01-01-000616, 03-01-00380, 06-01-00633).

Содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность тематики исследований, сформулирована цель работы, дан обзор работ, близких к тематике диссертации, изложено краткое содержание диссертации.

В **первой** главе проведено исследование итерационных методов решения вариационных и квазивариационных неравенств в гильбертовых и банаховых пространствах, установлены критерии слабой сходимости итерационных последовательностей. Естественно, что при использовании этих методов для решения аппроксимирующих задач, получается сходимость последовательностей в нормах конечномерных пространств. Численная реализация рассмотреннных итерационных процедур сводится к решению сеточных уравнений и неравенств, теория которых хорошо развита (см., например, книги А.А. Самарского и Е.С. Николаева; Р. Гловински, Ж.-Л. Лионса и Р. Тремольера и др.).

Рассмотрены смешанные вариационные неравенства с обратно сильно монотонными, вообще говоря, не потенциальными операторами и собственными выпуклыми полунепрерывными снизу функционалами. Для решения неравенств предложены методы расщепления, в основе которых лежат применяемые в потенциальном случае идеи двойственности с использованием расширенного лагранжиана (см., например, работы Д. Габэя, П.Л. Лионса, Б. Мерсье, Е.Г. Гольштейна, Н.В. Третьякова и др.). Отметим, что в отличие от ранее предлагаемых алгоритмов, рассмотренные итерационные процессы не требуют обращения операторов, входящих в вариационные неравенства. Исследование сходимости методов основано на применении результатов теории нерастягивающих отображений (см., например, работы Ф.Е. Браудера, В.В. Петрушина, З. Опиаля и др.)

В заключение предложен итерационный метод решения квазивариационных неравенств в банаховых пространствах с псевдомонотонным, потенциальным, коэрцитивным оператором. Каждый шаг этого метода сводится к решению вариационного неравенства с оператором двойственности, который обладает лучшими свойствами по сравнению с исходным псевдомонотонным оператором. Получены критерии сходимости итерационного процесса.

Отметим, что далее, в четвертой главе диссертации, эти итерационные методы применены для решения рассматриваемых в диссертации задач теории фильтрации и теории мягких сетчатых оболочек.

В § 1 первой главы рассматривается задача поиска такого элемента $u \in V$, что

$$(Au, \eta - u)_V + \Phi(\Lambda\eta) - \Phi(\Lambda u) + F(\eta) - F(u) \geq (f, \eta - u)_V \quad \forall\, \eta \in V, \tag{1}$$

где V, H – гильбертовы пространства, отождествленные со своими сопряженными (соответственно $(\cdot,\cdot)_V$, $(\cdot,\cdot)_H$ – скалярные произведения); $\Lambda : V \to H$ – линейный, непрерывный оператор, $F : V \to R^1$, $\Phi : H \to R^1$ – собственные, выпуклые, полунепрерывные снизу функционалы, $f \in V$ – заданный элемент, $A : V \to V$ – монотонный оператор.

Решение задачи (1) осуществляется при помощи следующего итерационного процесса. Зададим $\tau > 0$, $r > 0$, и пусть $u^{(0)} \in V$, $y^{(0)} \in H$, $\lambda^{(0)} \in H$ – произвольные элементы. Для $k = 0, 1, 2, \ldots$, зная $y^{(k)}$, $\lambda^{(k)}$, определим $u^{(k+1)}$ как решение вариационного неравенства

$$\left(\frac{u^{(k+1)} - u^{(k)}}{\tau}, \eta - u^{(k+1)} \right)_V + F(\eta) - F(u^{(k+1)}) \geq$$

$$\geq \left(f - Au^{(k)} - \Lambda^*\lambda^{(k)} - r\,\Lambda^*(\Lambda u^{(k)} - y^{(k)}), \eta - u^{(k+1)} \right)_V \;\; \forall \eta \in V. \tag{2}$$

Затем находим $y^{(k+1)}$, решая следующую задачу:

$$r\left(y^{(k+1)}, z - y^{(k+1)}\right)_H + \Phi(z) - \Phi(y^{(k+1)}) \geq \left(r\Lambda u^{(k+1)} + \lambda^{(k)}, z - y^{(k+1)}\right)_H \;\; \forall z \in H, \tag{3}$$

Полагаем, наконец,

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + r\,\left(\Lambda u^{(k+1)} - y^{(k+1)}\right). \tag{4}$$

Здесь $\Lambda^* : H \to V$ – сопряженный к Λ оператор:

$$(\Lambda^* y, \eta)_V = (y, \Lambda\eta)_H \qquad \forall\, y \in H, \quad \forall\, \eta \in V. \tag{5}$$

Исследование сходимости этого метода опирается на представлении его в виде метода последовательных приближений отыскания неподвижной точки оператора $T : V \times H \times H \to V \times H \times H$, ставящего в соответствие произвольному вектору $q = (\,q_1,\, q_2,\, q_3\,) = (u,\, y,\, \lambda\,)$ элемент $Tq = (T_1\, q,\, T_2\, q,\, T_3\, q)$ следующим образом:

$$T_1\, q = P_{\tau\, F}\left(q_1 - \tau\,\left[Aq_1 - f + \Lambda^* q_3 + r\,\Lambda^*(\Lambda q_1 - q_2)\,\right]\right),$$

$$T_2\, q = P_{1/r\,\Phi}\left(\Lambda T_1\, q + r^{-1}\, q_3\,\right), \quad T_3\, q = q_3 + r\,\left(\Lambda T_1\, q - T_2\, q\right),$$

где через $P_\varphi : Y \to Y$ обозначено проксимальное отображение с функционалом φ:

$$P_\varphi(y) = z : \qquad (z - y, \eta - z)_Y + \varphi(\eta) - \varphi(z) \geq 0 \quad \forall \eta \in Y,$$

так что итерационный процесс (2) – (4) записывается в виде

$$q^{(k+1)} = Tq^{(k)},\; q^{(0)} \in V \times H \times H - \text{ произвольный элемент}, \tag{6}$$

где $q^{(k)} = (u^{(k)}, y^{(k)}, \lambda^{(k)})$, $k = 0, 1, 2\ldots$

Установлена связь между множеством решением задачи (1) и множеством неподвижных точек оператора T:

Теорема 1. *Точка $q = (u, y, \lambda)$ является неподвижной точкой оператора T в том и только том случае, когда выполнены условия*

$$y = \Lambda u\,, \quad \lambda \in \partial\Phi(y), \quad -\Lambda^*\lambda \in \partial F(u) + Au\,;$$

при этом первая компонента u *любой неподвижной точки (u, y, λ) оператора T является решением задачи (1).*

Теорема 2. *Пусть существует решение задачи (1), и выполнено условие:*

$$\exists\, y^* \in \Lambda\,(\operatorname{dom} F) \cap \operatorname{dom}\Phi \ :\ \lim_{y \to y^*} \Phi(y) = \Phi(y^*).$$

Тогда множество неподвижных точек оператора T не пусто.

На прямом произведении пространств $V \times H \times H$ введена следующая билинейная форма:

$$(p, q)_Q = \frac{(1 - \tau\, r)}{\tau}\ (p_1, q_1)_V + r\ (p_2, q_2)_H + \frac{1}{r}\ (p_3, q_3)_H\ ,$$

определяющая, при условии $\tau r < 1$, скалярное произведение. Пространство с этим скалярным произведением обозначено через Q.

В дальнейшем предполагается, что оператор A является обратно сильно монотонным с константой $\sigma > 0$, то есть

$$(Au - A\eta, u - \eta)_V \geq \sigma\, \|Au - A\eta\|_V^2 \quad \forall\, u, \eta \in V.$$

Исследование сходимости итерационного процесса (6) опирается на следующий результат о свойствах оператора перехода T:

Теорема 3. *Пусть оператор A является обратно сильно монотонным с константой $\sigma > 0$, оператор $\Lambda^* \circ \Lambda$ является каноническим изоморфизмом, и выполнено следующее условие:*

$$\tau < \frac{2\,\sigma}{2\,\sigma\, r + 1}\,. \tag{7}$$

Тогда оператор T является нерастягивающим.

Более того, для произвольных $q = (q_1, q_2, q_3)$ и $p = (p_1, p_2, p_3)$ из Q справедливо неравенство

$$\|Tq - Tp\|_Q^2 + \delta\ (Aq_1 - Ap_1, q_1 - p_1)_V + r\ \|(q_2 - \Lambda T_1 q) - (p_2 - \Lambda T_1 p)\|_H^2 +$$

$$+ \frac{1}{\tau(1 - \tau\, r)}\ \|(1 - \tau\, r)((q_1 - T_1 q) - (p_1 - T_1 p)) - \tau\,(Aq_1 - Ap_1)\|_V^2 \leq \|q - p\|_Q^2\,,$$

где

$$\delta = \frac{2\sigma - \tau(2\sigma\, r + 1)}{\sigma(1 - \tau\, r)}\,.$$

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теорем 2 и 3, итерационная последовательность* $\{q^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ *построена согласно правилу* $q^{(k+1)} = Tq^{(k)}$, $q^{(0)} \in Q$ *– произвольно заданный элемент. Тогда эта последовательность сходится слабо в* Q *при* $k \to +\infty$, *ее предел* q^* *является неподвижной точкой оператора* T, *и справедливы равенства*

$$\lim_{k\to+\infty} \left\| y^{(k)} - \Lambda u^{(k)} \right\|_H = 0, \quad \lim_{k\to+\infty} \left\| q^{(k+1)} - q^{(k)} \right\|_Q = 0.$$

В § 2 первой главы рассмотрена задача поиска $u \in V$ такого, что

$$(Au, \eta - u)_V + (\Lambda^* \circ B \circ \Lambda(u), \eta - u)_V +$$
$$+G(\Lambda\eta) - G(\Lambda u) + F(\eta) - F(u) \geq 0 \qquad \forall\, \eta \in V, \tag{8}$$

где $\Lambda : V \to H$ – линейный, непрерывный оператор, $B : H \to H$ и $A : V \to V$ – монотонные операторы, $F : V \to R^1$ и $G : H \to R^1$ – собственные, выпуклые, полунепрерывные снизу функционалы, $\Lambda^* : H \to V$ – сопряженный к Λ оператор.

Для решения этого вариационного неравенства предложен следующий итерационный процесс. Зададим $\tau_A > 0$, $\tau_B > 0$ и $r > 0$. Пусть $u^{(0)} \in V$, $y^{(0)} \in H$ и $\lambda^{(0)} \in H$ – произвольные элементы. Для $k = 0, 1, 2, \ldots$, зная $y^{(k)}$, $\lambda^{(k)}$, определим $u^{(k+1)}$ как решение вариационного неравенства

$$\frac{1}{\tau_A}\left(u^{(k+1)} - u^{(k)}, \eta - u^{(k+1)}\right)_V + \left(Au^{(k)} + \Lambda^*\lambda^{(k)} + r\,\Lambda^*\left(\Lambda u^{(k)} - y^{(k)}\right), \eta - u^{(k+1)}\right)_V +$$
$$+F(\eta) - F(u^{(k+1)}) \geq 0 \qquad \forall\, \eta \in V. \tag{9}$$

Затем находим $y^{(k+1)}$, решая вариационное неравенство

$$\frac{1}{\tau_B}\left(y^{(k+1)} - y^{(k)}, z - y^{(k+1)}\right)_H + \left(By^{(k)} - \lambda^{(k)}\right) - r\left(\Lambda u^{(k+1)} - y^{(k)}\right), z - y^{(k+1)}\Big)_H +$$
$$+G(z) - G(y^{(k+1)}) \geq 0 \qquad \forall\, z \in H. \tag{10}$$

Полагаем, наконец,

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + r\left(\Lambda u^{(k+1)} - y^{(k+1)}\right) \tag{11}$$

Так же, как и в § 1, вводится оператор $T : V \times H \times H \to V \times H \times H$, ставящий в соответствие вектору $q = (q_1, q_2, q_3) = (u, y, \lambda)$ элемент $Tq = (T_1q, T_2q, T_3q)$ следующим образом:

$$T_1\, q = P_{\tau_A F}\left(q_1 - \tau_A\left[Aq_1 + \Lambda^* q_3 + r\,\Lambda^*(\Lambda q_1 - q_2)\right]\right),$$

$$T_2\, q = P_{\tau_B G}\left(q_2 - \tau_B\left[Bq_2 - q_3 + r\,(q_2 - \Lambda T_1 q)\right]\right), \quad T_3 q = q_3 + r\,(\Lambda T_1 q - T_2 q)\,.$$

При этом итерационный процесс (9) – (11) можно записать в виде

$$\begin{cases} q^{(0)} - \quad \text{произвольный элемент} \\ q^{(k+1)} = Tq^{(k)},\ q^{(k)} = (u^{(k)}, y^{(k)}, \lambda^{(k)}),\ k = 0, 1, 2 \ldots, \end{cases} \tag{12}$$

Теорема 5. *Точка $q = (u, y, \lambda)$ является неподвижной точкой оператора T в том и только том случае, когда выполнены условия:*

$$y = \Lambda u\,, \quad \lambda \in \partial G(y) + By, \quad -\Lambda^* \lambda \in \partial F(u) + Au\,;$$

при этом первая компонента u *любой неподвижной точки оператора T является решением задачи (8).*

Теорема 6. *Пусть существует решение задачи (8), и выполнено условие:*

$$\exists\, y^* \in \Lambda\,(\operatorname{dom} F) \cap \operatorname{dom} G \;:\; \lim_{y \to y^*} G(y) = G(y^*).$$

Тогда множество неподвижных точек оператора T не пусто.

Теорема 7. *Пусть множество неподвижных точек оператора T не пусто, операторы A, B являются обратно сильно монотонными с постоянными σ_A, σ_B и выполнены условия*

$$\tau_A < \frac{2\,\sigma_A}{2\,\sigma_A\, r + 1}\,, \quad \tau_B < \frac{2\,\sigma_B}{2\,\sigma_B\, r + 1}\,,$$

итерационная последовательность $\left\{q^{(k)}\right\}_{k=0}^{+\infty}$ построена согласно (12). Тогда эта последовательность сходится слабо к q^* в Q при $k \to +\infty$, q^* является неподвижной точкой оператора T, и справедливы равенства

$$\lim_{k \to +\infty} \left\| y^{(k)} - \Lambda u^{(k)} \right\|_H = 0, \quad \lim_{k \to +\infty} \left\| q^{(k+1)} - q^{(k)} \right\|_Q = 0.$$

В § 3 первой главы рассмотрена задача поиска элемента $u \in M \subseteq V$, являющегося решением следующего квазивариационного неравенства:

$$\langle Au, \eta - u \rangle \geq \langle f, \eta - u \rangle \quad \forall\, \eta \in M(u), \tag{13}$$

где V – рефлексивное банахово пространство, строго выпуклое вместе со своим сопряженным V^*, $\|\cdot\|_V$ – норма в V, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – отношение двойственности между V и V^*, M – слабо замкнутое, вообще говоря, не выпуклое подмножество V; каждому элементу $u \in M$ сопоставлено выпуклое, замкнутое множество $M(u) \subseteq M$, $f \in V^*$ – заданный элемент, $A : V \to V^*$ – псевдомонотонный, потенциальный, коэрцитивный оператор, удовлетворяющий условию:

$$\|Au - Av\|_{V^*} \leq \mu(R)\Psi(\|u - v\|_V) \quad \forall\, u, v \in V, \tag{14}$$

где $R = \max\{\|u\|_V, \|v\|_V\}$, μ – неубывающая на $[0, +\infty)$ функция, Ψ – непрерывная, строго возрастающая на $[0, +\infty)$ функция, такая, что $\Psi(0) = 0$, $\Psi\,(\xi) \to +\infty$ при $\xi \to +\infty$.

Относительно множества $M(u)$ считается, что $u \in M(u)$, и выполнено условие: пусть последовательность $\{u^{(k)}\} \subset M$ слабо сходится к элементу u (в силу слабой замкнутости M элемент u принадлежит множеству M), тогда для произвольного элемента $\eta \in M(u)$ найдется такая последовательность $\{\eta^{(k)}\}$, $\eta^{(k)} \in M(u^{(k)})$, что: $\lim_{k\to+\infty} \eta^{(k)} = \eta$, т.е. многозначное отображение $u \to M(u)$ полунепрерывно снизу.

Для решения задачи (13) предложен следующий итерационный процесс, позволяющий свести ее к вариационному неравенству с оператором двойственности вместо исходного псевдомонотонного оператора.

Пусть задан произвольный элемент $u^{(0)} \in M$. Для $k = 0, 1, 2, \ldots$, определим $u^{(k+1)} \in M(u^{(k)})$ как решение вариационного неравенства:

$$\langle J(u^{(k+1)} - u^{(k)}), v - u^{(k+1)}\rangle \geq \tau\langle f - Au^{(k)}, v - u^{(k+1)}\rangle \quad \forall\, v \in M(u^{(k)}), \tag{15}$$

где $\tau > 0$ итерационный параметр, $J : V \to V^*$ – оператор двойственности, порождаемый функцией Ψ.

Доказана

Теорема 8. *Пусть M – выпуклое множество, и выполнено условие*

$$0 < \tau < \min\{1, 1/\mu_0\}, \quad \mu_0 = \mu(R_0 + \Psi^{-1}(R_1)), \tag{16}$$

где $R_0 = \sup\limits_{u\in S_0} \|u\|_V$, $R_1 = \sup\limits_{u\in S_0} \|Au - f\|_{V^*}$, $S_0 = \{u \in M : F(u) \leqslant F(u_0)\}$. Тогда итерационная последовательность $\{u^{(k)}\}$, построенная согласно (15), ограничена в V, и все ее слабо предельные точки являются решениями задачи (13).

Функционал $F : V \to R^1$, участвующий в формулировке теоремы, определен соотношением

$$F(u) = F_A(u) - \langle f, u\rangle, \quad F_A(u) = \int\limits_0^1 \langle A(tu), u\rangle dt,$$

и из его коэрцитивности вытекает, что $R_0 < +\infty$, а из ограниченности оператора A следует, что $R_1 < +\infty$. Таким образом, $0 < \mu_0 < +\infty$, т.е. итерационный параметр в (16) определен корректно.

Вторая глава посвящена исследованию математических моделей процессов установившейся фильтрации несжимаемой жидкости, следующей нелинейному закону фильтрации, в произвольной ограниченной области при наличии точечных источников. Рассматриваются случаи как непрерывного, так и многозначного законов фильтрации. Предполагается, что функция, определяющая закон фильтрации, имеет линейный рост на бесконечности.

В случае, когда область фильтрации и функция, определяющая закон фильтрации, имеют специальный вид, указанные задачи исследовались на основе преобразований типа годографа области и методами теории струй в работах А.М. Алишаева, В.М. Ентова, Н.Б. Ильинского, Ю.М. Молоковича, Э.В. Скворцова, Л.М. Котляра и др.

Вопросам исследования корректности математических моделей и соответствующих приближенных методов для установившихся и неустановившихся процессов фильтрации несжимаемой жидкости, следующей нелинейному закону фильтрации (с предельным градиентом, с многозначным законом) посвящены работы А.Д. Ляшко, М.М. Карчевского, А.В. Лапина, И.Б. Бадриева, М.Ф. Павловой и др. В этих работах в случае произвольной ограниченной области устанавливается существование обобщенного решения стационарной задачи с законом фильтрации, задаваемым функцией, имеющей степенной (в том числе и линейный) рост на бесконечности. При этом обобщенные задачи формулируются в виде уравнений или вариационных неравенств с оператором, действующим в случае линейного роста из гильбертова соболевского пространства в сопряженное.

В настоящей главе проведено исследование нелинейных задач фильтрации с менее гладкой правой частью: в неодномерном случае дельта-функция Дирака, моделирующая точечный источник, не принадлежит указанному сопряженному пространству. Обойти эту трудность удалось благодаря аддитивному выделению особенности, связанной с дельта-функцией.

В § 1 второй главы рассматривается стационарная задача фильтрации несжимаемой жидкости, следующей нелинейному закону фильтрации

$$v = -g(\,|\,\nabla w\,|\,)\,|\,\nabla w\,|^{-1}\,\nabla w\,, \tag{17}$$

где v – поле скоростей фильтрации, w – поле давления жидкости. Фильтрация происходит в ограниченной области $\Omega \subset R^n$, $n \geq 2$ с липшиц-непрерывной границей Γ, на которой давление считается равным нулю, при наличии точечного источника с интенсивностью q в начале координат (считаем, что начало координат – внутренняя точка Ω). Указанный процесс фильтрации описывается следующей краевой задачей

$$-\mathrm{div}\, v(x) = q\,\delta(x), \quad x \in \Omega, \tag{18}$$

$$w(x) = 0, \quad x \in \Gamma\,. \tag{19}$$

Считаем, что функция g, определяющая закон фильтрации (17), представима в виде:

$$g(s) = \begin{cases} 0\,, & s \leq s_0 \\ g_0(s - s_0)\,, & s \geq s_0, \end{cases} \tag{20}$$

$s_0 \geq 0$ – заданное число (случай $s_0 > 0$ соответствует закону фильтрации с предельным градиентом s_0), функция $g_0 : [0, +\infty) \to R^1$ строго возрастает, $g_0(0) = 0$,

$$g_0(s) - g_0(t) \geq k\,(s - t)\ \forall\, s \geq t \geq s^*, \quad |\,g_0(s) - g_0(t)\,| \leq L\,|\,s - t\,|\ \forall\, s, t \geq 0. \tag{21}$$

Под обобщенным решением задачи (18), (19) понимается функция $w \in \overset{\circ}{W}{}_1^{(1)}(\Omega)$ такая, что выполнено следующее вариационное равенство

$$\int\limits_{\Omega} (G(\nabla w(x)), \nabla\eta(x))\,dx = q\,\eta(0) \qquad \forall\, \eta \in C_0^\infty(\Omega), \tag{22}$$

где оператор $G: R^n \to R^n$ определен по функции g следующим образом:

$$G(y) = \begin{cases} g(|y|)\,|\,y\,|^{-1}\,y\,, & y \neq 0, \\ 0\,, & y = 0. \end{cases} \tag{23}$$

При исследовании задачи (22) использован частный случай этой задачи при

$$\Omega = B_r = \{x \in R^n : \, |x| < r\}, \quad \Gamma = S_r = \{x \in R^n : \, |x| = r\} :$$

$$\text{найти } \; w \in \overset{\circ}{W}{}_1^{(1)}(B_r) : \int\limits_{B_r} (G(\nabla w(x)), \nabla \eta(x))\, dx = q\,\eta(0) \quad \forall \eta \in C_0^\infty(B_r). \tag{24}$$

Решение задачи (24) определено в явном виде:

$$w_r : B_r \to R^1\,,\; w_r(x) = p_r(|x|)\frac{q}{|q|}\,,\; p_r(s) = \int\limits_s^r h\left(\frac{|q|}{\sigma_1 \xi^{n-1}}\right)\, d\xi, \tag{25}$$

где $\sigma_1 = \operatorname{mes} S_1$, $h(s) = h_0(s) + s_0$, функция h_0 является обратной к g_0.

Далее r выбирается достаточно большим, так, чтобы выполнялось включение $\Omega \subseteq B_r$, и, поскольку 0 является внутренней точкой Ω, то существует такое $\varepsilon > 0$, что $\Gamma \subset B_r \setminus B_\varepsilon$. Установлено, что $w_r \in W_2^{(1)}(\Omega \setminus B_\varepsilon)$, а значит, найдется функция $w_\Gamma \in W_2^{(1)}(\Omega)$, для которой выполнено условие

$$w_\Gamma(x) = -w_r(x)\,,\; x \in \Gamma. \tag{26}$$

Решение задачи (22) ищется в виде $w = w_r + w_\Gamma + u$, где $u \in V = \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$ – неизвестная функция. Поскольку $C_0^\infty(\Omega) \subseteq C_0^\infty(B_r)$, то задача (22) сведена к следующей:

$$\text{найти } \;\; u \in V : \int\limits_\Omega (G(\nabla(w_r + w_\Gamma + u)) - G(\nabla w_r), \nabla \eta)\, dx = 0 \quad \forall\, \eta \in C_0^\infty(\Omega). \tag{27}$$

Для исследования задачи (27) определен онператор $A: V \to V$,

$$(Au, \eta)_V = \int\limits_\Omega (G(\nabla(w_r + w_\Gamma + u)) - G(\nabla w_r), \nabla \eta)\, dx \qquad u, \eta \in V,$$

где $(\cdot,\cdot)_V$ – скалярное произведение на V.

Установлено, что при выполнении условий (20), (21) оператор A является обратно сильно монотонным с постоянной $\sigma = 1/L$ и коэрцитивным, и, поскольку задачу (27) можно записать в виде уравнения $Au = 0$, то на основе результатов теории уравнений с монотонными операторами получено существование решения задачи (22).

В § 2 главы 2 рассмотрена стационарная задача фильтрации несжимаемой жидкости при наличии внешних источников, в том числе точечных с интенсивностью q_i, сосредоточенных в точках $x^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots m$. Фильтрация происходит в ограниченной области $\Omega \subset R^n$, $n \geq 2$, с липшиц-непрерывной границей $\Gamma = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$ ($\Gamma_1 \bigcap \Gamma_2 = \emptyset$, $\operatorname{mes} \Gamma_1 > 0$, на Γ_1 давление считается равным нулю, Γ_2 – непроницаема). Поле скоростей фильтрации $v(x)$, $x \in \Omega$ определяется по полю давлений w в соответствии с законом (17), (20), (21), описанным в предыдущем параграфе. Краевая задача имеет следующий вид:

$$-\operatorname{div} v(x) = \sum_{i=1}^{m} q_i\, \delta(x - x^{(i)}) + \widetilde{f}\,(x), \quad x \in \Omega, \tag{28}$$

$$w(x) = 0,\ x \in \Gamma_1, \quad (v(x), \nu(x)) = 0,\ x \in \Gamma_2, \quad \nu - \text{ внешняя нормаль },\tag{29}$$

предполагается, что $\widetilde{f}$ порождает линейный и непрерывный функционал f над $W_2^{(1)}(\Omega)$.

Под решением задачи (28), (29) понимается такая функция $w \in W_1^{(1)}(\Omega)$, что $w(x) = 0$, $x \in \Gamma_1$, что выполнено следующее равенство

$$\int\limits_{\Omega} (G(\nabla w(x)), \nabla \eta(x))\, dx = \sum_{i=1}^{m} q_i\, \eta(x^{(i)}) + \int\limits_{\Omega} \widetilde{f}\,(x) \eta(x)\, dx \qquad \forall\, \eta \in C^{\infty}_{\Gamma_1}(\Omega), \tag{30}$$

где G – оператор, определенный в (23), а через $C^{\infty}_{\Gamma_1}(\Omega)$ обозначено множество бесконечно дифференцируемых в $\overline{\Omega}$ функций, равных нулю в окрестности Γ_1.

По аналогии с § 1 рассмотрены следующие задачи для $i = 1, 2, \ldots, m$:

$$\text{найти } w_r^{(i)} \in \overset{\circ}{W}{}_1^{(1)}(B_r^i) : \int\limits_{B_r^i} (G(\nabla w_r^{(i)}(x)), \nabla \eta(x))\, dx = q_i \eta(x^{(i)}) \quad \forall\, \eta \in C_0^{\infty}(B_r^i). \tag{31}$$

где $B_r^i = B_r(x^{(i)})$, $B_r(x) = \{z \in R^n : |z - x| < r\}$. Решения этих задач имеют вид

$$w_r^{(i)}(x) = \frac{q_i}{|q_i|} \int\limits_{|x - x^{(i)}|}^{r} h\left(\frac{|q_i|}{\sigma_1 \xi^{n-1}}\right) d\xi. \tag{32}$$

Далее r выбрано достаточно большим, так, чтобы выполнялись включения $\Omega \subseteq B_r^i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, и, значит, определена функция:

$$w_r(x) = \sum_{i=1}^{m} w_r^{(i)}(x)\,,\ x \in \Omega\,. \tag{33}$$

Так как попарно различные точки $x^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots m$, являются внутренними точками Ω, то существует такое $\varepsilon > 0$, что $B_\varepsilon^i \bigcap B_\varepsilon^j = \emptyset$ при $i \neq j$, и $\Gamma \bigcap B_\varepsilon^i = \emptyset$ для любого i, следовательно, $w_r \in W_2^{(1)}(\Omega \setminus B_\varepsilon)$, $B_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^m B_\varepsilon^i$, и, таким образом, найдется функция w_Γ, для которой выполнены условия

$$w_\Gamma \in W_2^{(1)}(\Omega)\,,\ w_\Gamma(x) = -w_r(x)\,,\ x \in \Gamma_1. \tag{34}$$

Решение задачи (30) ищется в виде $w = w_r + w_\Gamma + u$, где $u \in V$ – неизвестная функция, $V = \{\eta \in W_2^{(1)}(\Omega) : \eta(x) = 0\,,\, x \in \Gamma_1\}$, относительно которой, с учетом равенств (31), сформулирована задача:

$$\int\limits_\Omega \left(G(\nabla(w_r + w_\Gamma + u)) - \sum_{i=1}^m G(\nabla w_r^{(i)}), \nabla\eta \right) dx = \int\limits_\Omega \widetilde{f}\,(x)\eta(x)\,dx \;\forall\,\eta \in C^\infty_{\Gamma_1}(\Omega). \quad (35)$$

Далее определен оператор $A : V \to V$ формой

$$(Au, \eta)_V = \int\limits_\Omega \left(G(\nabla(w_r + w_\Gamma + u)) - \sum_{i=1}^m G(\nabla w_r^{(i)}), \nabla\eta \right) dx, \quad (36)$$

и задача (35) записывается в виде уравнения: $Au = f$.

Доказано, что оператор A является обратно сильно монотонным и коэрцитивным, и, на основе этих свойств, установлено существование решения задач (35), (30) и единственность скорости фильтрации.

В § 3 второй главы рассмотрена задача фильтрации (28), (29) в предположении, что жидкость следует многозначному закону фильтрации

$$-v(x) \in \frac{\bar{g}(|\nabla w(x)|)}{|\nabla w(x)|}\,\nabla w(x), \quad x \in \Omega. \quad (37)$$

Считается, что многозначная функция $\bar{g}$ может быть представлена в виде:

$$\bar{g}(s) = g(s) + \theta\,H(s - \beta), \quad s \geq 0, \quad (38)$$

где функция g удовлетворяет условиям (20), (21), H определена по формуле

$$H(s) = \begin{cases} 0, & s < 0, \\ [0,1], & s = 0, \\ 1, & s > 0, \end{cases} \quad (39)$$

$\theta > 0$ и $\beta \geq s_0$ – заданные числа, (s_0 – константа из (20)).

Под решением стационарной задачи фильтрации несжимаемой жидкости, следующей многозначному закону (37), при наличии точечных источников интенсивности q_i понимается функция (поле давления) $w \in W_1^{(1)}(\Omega)$, $w(x) = 0$, $x \in \Gamma_1$ удовлетворяющая вариационному неравенству

$$\int\limits_\Omega (G(\nabla w(x)), \nabla\eta(x))\;dx + \theta \int\limits_\Omega \;[\,\varphi(|\nabla(\eta(x) + w(x))| - \beta) - \varphi(|\nabla w(x)| - \beta)\,]\;dx \geq$$

$$\geq \sum_{i=1}^m q_i\eta(x^{(i)}) + \int\limits_\Omega \widetilde{f}\,(x)\eta(x)\,dx \quad \forall\,\eta \in C^\infty_{\Gamma_1}(\Omega), \quad (40)$$

где оператор G определен в (23), а функция φ является субпотенциалом многозначной функции H:

$$\varphi(s) = \begin{cases} 0, & s < 0, \\ s, & s \geq 0, \end{cases}$$

Пусть, далее, функции w_r, $w_r^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots m$, w_Γ заданы согласно (33) и (34), пространство V определено так же, как и в § 2 главы 2.

Решение задачи (40) ищется в виде $w = w_r + w_\Gamma + u$, где $u \in V$ – неизвестная функция, и, с учетом равенств (31), задача (40) сводится к следующей:

$$\text{найти}\, u \in V : \int\limits_\Omega \left(G(\nabla(w_r + w_\Gamma + u)) - \sum_{i=1}^{m} G(\nabla w_r^{(i)}), \nabla\eta \right) dx +$$

$$+\theta \int\limits_\Omega \varphi(|\nabla(\eta + w_r + w_\Gamma + u)| - \beta)\, dx - \theta \int\limits_\Omega \varphi(|\nabla(w_r + w_\Gamma + u)| - \beta)\, dx \geq$$

$$\geq \int\limits_\Omega \widetilde{f}\, \eta\, dx \qquad \forall\, \eta \in C^\infty_{\Gamma_1}(\Omega). \tag{41}$$

Введены в рассмотрение функционал $\Phi : Y = [L_2(\Omega)]^n \to R^1$, оператор $\Lambda : V \to Y$ и сопряженный к нему $\Lambda^* : Y \to V$ по формулам

$$\Phi(\xi) = \theta \int\limits_\Omega \varphi(|\nabla(w_r + w_\Gamma) + \xi| - \beta)\, dx, \tag{42}$$

$$\Lambda(u) = \nabla u\,,\ (\Lambda^*(\xi), u)_V = \int\limits_\Omega (\xi, \nabla u)\, dx \quad \forall\, u \in V,\, \xi \in Y,$$

где $\xi(x) = (\xi_1(x), \xi_2(x), \ldots \xi_n(x))$, $\xi_i \in L_2(\Omega)$, $i = 1, 2, \ldots n$.

Установлено, что функционал Φ, определенный в (42), конечен на всем пространстве, является выпуклым, липшиц-непрерывным и, следовательно, всюду субдифференцируемым. Доказано, что для каждого $y \in \partial\Phi(\xi) \subset Y$ существует такая функция χ_y, что для почти всех x из Ω выполнены равенство

$$y(x) = \chi_y(x) \frac{\nabla(w_r(x) + w_\Gamma(x)) + \xi(x)}{|\nabla(w_r(x) + w_\Gamma(x)) + \xi(x)|} \tag{43}$$

и включение

$$\chi_y(x) \in \theta\, H(|\nabla(w_r(x) + w_\Gamma(x)) + \xi(x)| - \beta). \tag{44}$$

Здесь принято соглашение, что для случая $z = 0$ вектор $z/|z|$ является некоторым элементом единичного шара $B_1 = \{b \in R^n : |b| \leq 1\}$.

Далее задача (41) записана в виде эквивалентного вариационного неравенства:

$$\text{найти}\ \ u \in V :\ (Au, \eta - u)_V + \Phi(\Lambda\eta) - \Phi(\Lambda u) \geq (f, \eta - u)_V \quad \forall\, \eta \in V \tag{45}$$

с оператором A, определенным в (36), линейным и непрерывным функционалом f над V, порожденным функцией $\widetilde{f}$, и доказана

Теорема 9. *Пусть выполнены условия (20), (21). Тогда:*

1) Множество решений задачи (45) не пусто, выпукло и замкнуто.

2) Задача (28), (29), (37) имеет решение в следующем смысле: найдется такая пара функций $w \in W_1^{(1)}(\Omega)\ : w(x) = 0\,,\ x \in \Gamma_1$ *и* $v \in [L_1(\Omega)]^n$*, что выполнено почти всюду на* Ω *включение (37), и имеет место равенство:*

$$\int\limits_{\Omega} (v(x)\,,\, \nabla\eta(x))\,dx = \int\limits_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^{m} q_i\delta(x - x^{(i)}) + \widetilde{f}\,(x)\right]\eta(x)\,dx \quad \forall\,\eta \in C^{\infty}_{\Gamma_1}(\Omega). \tag{46}$$

Более того, решение w *имеет следующий вид* $w = w_r + w_\Gamma + u$*, где* u *– некоторое решение задачи (45) .*

3) Для любых решений w_1*,* w_2 *задачи (28), (29), (37) в смысле п. 2 настоящей теоремы справедливы соотношения* $G(\nabla w_1) = G(\nabla w_2)$*,*

$$\Omega^{+}_{w_1} = \Omega^{+}_{w_2} = \Omega_0 \ \text{ с точностью до множества меры нуль,}$$

где $\Omega^{+}_{\eta} = \{x \in \Omega : \ |\nabla\eta(x)| > s_0\}$.

В **третьей** главе рассматрены пространственные задачи о равновесном состоянии мягких оболочек, находящихся под воздействием внешних нагрузок и ограниченных в перемещении препятствием.

Описанию задач теории мягких оболочек, численным методам их решения, посвящена многочисленная литература, в частности, работы С.А. Алексеева, Х.А. Рахматуллина, В.И. Усюкина, Б.В. Гулина, В.В. Риделя, Р.Ш. Гимадиева и др., математические вопросы теории изотропных мягких оболочек рассмотрены в работах Р.Р. Шагидуллина, А.Д. Кидониса и др.

Важным классом мягких оболочек являются сетчатые оболочки. Различным математическим вопросам исследования задач теории мягких сетчатых оболочек, построению приближенных методов их решения посвящены работы В.Л. Бидермана, Б.Л. Бухина, Е.Г. Дьяконова, И.Б. Бадриева, Р.Р. Шагидуллина и др.

С точки зрения приложений важную роль играют контактные задачи. В случае мягких оболочек сложность этих задач возрастает в связи с сильной формоизменяемостью этих оболочек. Следует отметить, что наличие препятствия приводит к необходимости использовать при математическом описании этих задач квазивариационные неравенства.

В первом параграфе, исходя из уравнений равновесия, записанных в декартовой системе координат, сформулирована дифференциальная задача. Затем на основе принципа виртуальных перемещений получена вариационная формулировка. При условии достаточной гладкости решения установлена эквивалентность указанных задач.

Затем рассмотрен случай мягкой сетчатой оболочки, силовой основой которой являются два семейства взаимно перекрещивающихся, абсолютно гибких упругих нитей. Ячейки сети считаются малыми и не сопротивляющимися сдвиговым деформациям. Деформации и перемещения допускаются конечными. Нити, образующие разные семейства, могут описываться разными физическими законами. В предположении степенного роста функций, задающих физические соотношения в нитях, поставлена обобщенная задача в виде квазивариационного неравенства в банаховом пространстве и установлена ее разрешимость.

Для задачи с препятствием выпуклой формы установлены свойства множества допустимых перемещений, позволяющие использовать предложенный в § 3 главы 1 итерационный метод для решения квазивариационных неравенств.

Наконец, рассмотрена задача с выпуклым допустимым множеством (с препятствием вогнутой формы) при наличии следящей поверхностной нагрузки. При этом обобщенная задача сформулирована в виде вариационного неравенства. Получены критерии существования решения обобщенной задачи.

В § 1 третьей главы рассмотрена пространственная задача о равновесном состоянии мягкой оболочки при условии, что поверхность препятствия описывается достаточно гладкой функцией. Введена декартова система координат $(x_1,\ x_2,\ x_3)$. Считается, что в недеформированном состоянии оболочка может быть описана поверхностью: $\xi(\alpha) = (\xi_1(\alpha), \xi_2(\alpha), \xi_3(\alpha))$, где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \Omega$ – лагранжевы координаты, Ω – ограниченная область из R^2 с непрерывной по Липшицу границей Γ; предполагается, что функция ξ удовлетворяет условиям:

$$\xi \in \left[C_1(\bar{\Omega})\right]^3 \ , \ |\left[\partial_1\xi(\alpha), \partial_2\xi(\alpha)\right]| \ \geq c > 0 \ \forall\, \alpha \in \bar{\Omega}.$$

Через $w(\alpha) = (w_1(\alpha), w_2(\alpha), w_3(\alpha))$ обозначена функция, описывающая поверхность оболочки в деформированном состоянии, $G(\alpha) = |[\partial_1 w(\alpha), \partial_2 w(\alpha)]|^2$ – дискриминант метрического тензора поверхности деформированной оболочки.

Здесь использованы обозначения: $\partial_k = \partial/\partial\alpha_k$, $k = 1, 2$; $[\cdot,\cdot]$, $(\cdot,\cdot)$ и $|\cdot|$ – векторное, скалярное произведения и норма в R^3 соответственно.

Известно, что уравнение равновесия оболочки, находящейся под воздействием внешних сил, в декартовой системе координат имеет следующий вид:

$$\sum_{k,m=1}^{2} \partial_m\,(\sqrt{G}\,T^{km}\,\partial_k w) + \sqrt{G}\,P + \sqrt{G}\,\gamma\,Q = 0\ , \tag{47}$$

где P, Q – вектора плотности соответственно поверхностной и массовой нагрузок, γ – плотность материала оболочки в деформированном состоянии, T^{km} – ковариантные компоненты тензора напряжений: $\mathrm{T} = \sum_{k,m=1}^{2} T^{km} R_k R_m$, $R_k(\alpha) = \partial_k w(\alpha)$ – вектора, образующие ковариантный локальный базис на деформированной поверхности.

Предполагается, что расположение оболочки в пространстве ограничено препятствием, а края оболочки закреплены: $w(\alpha_1, \alpha_2) = \xi(\alpha_1, \alpha_2)$, $(\alpha_1, \alpha_2) \in \Gamma$.

Взаимодействие препятствия с оболочкой учтено путем внесения в уравнение (47) дополнительной поверхностной нагрузки P_0 – плотности силы реакции препятствия:

$$D(w)+\sqrt{G}P_0=0,\; D(w)\equiv\sum_{k,m=1}^{2}\partial_m(\sqrt{G}\,T^{km}\,\partial_k\,w)+\sqrt{G}\,P+\sqrt{G}\,\gamma\,Q. \qquad (48)$$

Во введенной декартовой системе координат поверхность препятствия задается в виде $x_3=\varphi(x_1,x_2)$, где $\varphi\in C_1(R^2)$, и оболочка находится "над препятствием", т.е. $\xi_3(\alpha)\geq\varphi(\xi_1(\alpha),\xi_2(\alpha))$, $\alpha\in\bar{\Omega}$.

Предполагается также, что материал препятствия абсолютно твердый, а его поверхность – абсолютно гладкая, т.е. препятствие, при воздействии на него, не деформируется и порождает усилия только в направлении внешней нормали к своей поверхности. Тогда плотность силы реакции препятствия можно представить в виде $P_0(\alpha)=\beta(\alpha)N(w(\alpha))$, где $\beta:\bar{\Omega}\to R$ – неизвестная функция, удовлетворяющая условиям:

$$\beta(\alpha)\geq 0,\; \alpha\in I(w)\equiv\{\,\tilde{\alpha}\in\bar{\Omega}:w_3(\tilde{\alpha})=F(w(\tilde{\alpha}))\}; \qquad (49)$$

$$\beta(\alpha)=0,\; \alpha\in I^-(w)\equiv\{\,\tilde{\alpha}\in\bar{\Omega}:w_3(\tilde{\alpha})>F(w(\tilde{\alpha}))\}. \qquad (50)$$

Здесь $F(x_1,x_2,x_3)=\varphi(x_1,x_2)$, $x\in R^3$, а через $N:R^3\to R^3$ обозначена вектор-функция, связанная с единичной внешней нормалью к поверхности препятствия формулой

$$N(x_1,x_2,x_3)=\frac{\nu(x_1,x_2)}{|\nu(x_1,x_2)|}\;,\; x\in R^3, \qquad (51)$$

$$\nu=[\tau_1,\tau_2]\,,\tau_1=(1,0,\partial_1\varphi(x_1,x_2))\;,\tau_2=(0,1,\partial_2\varphi(x_1,x_2))\,.$$

Задача о равновесном положении закрепленной по краю мягкой оболочки, находящейся под воздействием нагрузки и ограниченной в пространстве абсолютно твердым и гладким препятствием, сведена к поиску функций $w\in\tilde{M}$ и β, удовлетворяющих уравнению

$$D(w(\alpha))+\sqrt{G(\alpha)}\,\beta(\alpha)\,N(w(\alpha))=0\,,\quad \alpha\in\Omega\,, \qquad (52)$$

и условиям (49), (50), где

$$\tilde{M}=\left\{v:\bar{\Omega}\to R^3\;,\; v_3(\alpha)\geq F(v(\alpha)),\alpha\in\bar{\Omega},\; v|_\Gamma=\xi|_\Gamma\right\}, \qquad (53)$$

$\tilde{M}$ – множество допустимых конфигураций оболочки, состоящее из функций описывающих поверхности, находящиеся "над препятствием".

Далее осуществлен переход к вариационной формулировке этой задачи:

$$\text{найти}\, w\in\tilde{M}\;:\;\int\limits_{\Omega}\;(D(w(\alpha)),\eta(\alpha))\,d\alpha\leq 0\quad\forall\,\eta\in\tilde{M}\;(w), \qquad (54)$$

где $\tilde{M}\;(\tilde{w})$ – множество допустимых направлений из произвольного положения оболочки $\tilde{w}\in\tilde{M}$, достаточно малый сдвиг по которым из $\tilde{w}$ принадлежит $\tilde{M}$:

$$\tilde{M}\;(\tilde{w})=\left\{v:\bar{\Omega}\to R^3\,,\;\exists\,s_v>0\,;\tilde{w}+s\,v\in\tilde{M}\quad\forall\,s\in[0,s_v]\right\}. \qquad (55)$$

Установлено, что решение w задачи (52) и (49), (50) является решением задачи (54), а при сответствующей гладкости – решение w задачи (54) и функция

$$\beta(\alpha) = \frac{|D(w(\alpha))|}{|\,[\partial_1 w(\alpha), \partial_2 w(\alpha)]\,|}\,,\ \alpha \in \bar{\Omega},$$

построенная по w, удовлетворяют уравнению (52) и условиям (49), (50).

В § 2 третьей главы рассмотрена задача с препятствием о равновесии мягкой сетчатой оболочки. Под сетчатой понимается оболочка, силовой основой которой является сетка, образованная двумя системами взаимно перекрещивающихся, абсолютно гибких упругих нитей. Ячейки сети считаются малыми и не сопротивляющимися сдвиговым деформациям. Деформации и перемещения допускаются конечными.

Лагранжевы координаты (α^1, α^2) выбраны так, что координатные линии сонаправленны с нитями, образующими оболочку. Через $t_1, t_2 : R_+ \to R_+$ обозначены функции, характеризующие физические свойства нитей, через $\rho_k : \Omega \to R_+$ – количество нитей, сонаправленных с α^k-й координатной осью, на единицу длины α^{k^*}-й координатной оси в недеформированном состоянии ($k = 1, 2,\ k^* = 3 - k$). Эти функции определены конструкцией сетчатой оболочки, и предполагается, что они удовлнтворяют условиям:

$t_k \in C(R_+)$, $t_k(s) = 0$ при $s \le 1$ (т.е. нити не воспринимают сжимающих усилий),
$t_k(s)$ – строго возрастает при $s \ge 1$, существуют такие $c_0, c_1, C > 0$, $p_1, p_2 > 1$, что
$c_0 s^{p_k} - c_1 \leqslant t_k(s) s \leqslant C s^{p_k}$,
$\rho_k \in C(\bar{\Omega})$ и существует $c > 0$, что $\rho_k(\alpha) \ge c > 0$ для всех $\alpha \in \bar{\Omega}$.

Для сетчатой оболочки, поскольку считается, что ячейка сети не оказывает сопротивления повороту нитей в узлах скрепления, и в силу выбора лагранжевой системы координат для компонент тензора напряжений выполнены равенства:

$$T^{12} = T^{21}\,,\ \sqrt{G}\,T^{kk} = \frac{t_k(|\partial_k w|/g_k)}{|\partial_k w|}\rho_k g_{k^*}\,,\ \text{где}\, g_k = |\,\partial_k\,\xi\,|,\ k = 1, 2\,.$$

Задача сформулирована в перемещениях: искомой выбрана вектор-функция $u(\alpha) = w(\alpha) - \xi(\alpha)$, $\alpha \in \bar{\Omega}$, где w, ξ – соответственно нагруженное и начальное положение оболочки. Введено пространство

$$V = \left[\overset{\circ}{W}{}^{(1)}_{p_1,p_2}(\Omega)\right]^3, \text{с нормой}\, \|v\|_V \equiv \|\,|\partial_1 v|\,\|_{L_{p_1}} + \|\,|\partial_2 v|\,\|_{L_{p_2}}. \tag{56}$$

Для рассматриваемого случая уточнены определения множеств (53), (55):

$$M = \{v \in V:\ \xi_3(\alpha) + v_3(\alpha) \ge F(\xi(\alpha) + v(\alpha))\ \text{ п. вс. на } \Omega\}\,, \tag{57}$$

$$M(u) = \{v \in M : \forall\, s \in [0,1], u + s(v - u) \in M\}\,.$$

Поверхностная нагрузка предполагается равной нулю: $P = 0$. Плотность массовых сил $Q : \Omega \to R^3$ считается известной. В силу закона сохранения массы имеем:

$\sqrt{G}\gamma = |[\partial_1\xi(\alpha), \partial_2\xi(\alpha)]|\ \overset{\circ}{\gamma}$, где $\overset{\circ}{\gamma}$: $\Omega \to R^1$ – заданная плотность материала недеформированной оболочки. Относительно Q и $\overset{\circ}{\gamma}$ считаются выполненными условия: $Q \in \left[C(\bar{\Omega})\right]^3$, $\overset{\circ}{\gamma} \in C(\bar{\Omega})$; $\overset{\circ}{\gamma}(\alpha) \geqslant c > 0$, $\alpha \in \bar{\Omega}$. Вариационная задача (54), в силу выше сделанных предположений, приводит к следующей задаче:

$$\text{найти}\, u \in M\ : \sum_{k=1}^{2} \int\limits_{\Omega} \frac{t_k(|\partial_k(\xi+u)|/g_k)}{|\partial_k(\xi+u)|} \rho_k g_{k^*}(\partial_k(\xi+u), \partial_k(v-u))\, d\alpha \geq$$

$$\geq \int\limits_{\Omega} (|\,[\partial_1\xi, \partial_2\xi]\,|\ \overset{\circ}{\gamma}\, Q, v-u)\, d\alpha \quad \forall\, v \in M(u). \tag{58}$$

Далее определены операторы $A, A_k : V \to V^*$ и функционал $f \in V^*$ формами:

$$A \equiv A_1 + A_2\,,\ \langle A_k u, v\rangle = \int\limits_{\Omega} \frac{t_k(|\partial_k(\xi+u)|/g_k)}{|\partial_k(\xi+u)|} \rho_k g_{k^*}(\partial_k(\xi+u), \partial_k v) d\alpha\,,\ k = 1, 2,$$

$$\langle f, v\rangle = \int\limits_{\Omega} (|\,[\partial_1\xi, \partial_2\xi]\,|\ \overset{\circ}{\gamma}\, Q, v) d\alpha, \tag{59}$$

и с учетом этих обозначений обобщенная задача (58) сформулирована в виде квазивариационного неравенства:

$$\text{найти} \quad u \in M :\ \langle A(u), v-u\rangle \geq \langle f, v-u\rangle \quad \forall\, v \in M(u). \tag{60}$$

Установлено, что оператор A хеминепрерывен, монотонен, коэрцитивен и потенциален. С учетом этого на основе результатов теории нелинейного функционального анализа доказано, что задача (60) имеет решение.

В § 3 третьей главы функция φ, описывающая поверхность препятствия, считается вогнутой на всей области её определения:

$$\varphi(\lambda(x_1, x_2) + (1-\lambda)(x_1, x_2)) \geq \lambda\, \varphi(x_1, x_2) + (1-\lambda)\varphi(x_1, x_2)\ \forall\, (x_1, x_2) \in R^2,\ \forall\, \lambda \in [0, 1],$$

и, таким образом, множество $\Delta_\varphi = \{x \in R^3 : x_3 \leq \varphi(x_1, x_2)\}$, которое можно считать, без ограничения общности, препятствием, является выпуклым и замкнутым.

Дифференциальной задаче (52), (49), (50) сопоставлена вариационная задача (60) с множеством допустимых направлений

$$M(v) = \{\eta \in V\ : (\xi(\alpha) + \eta(\alpha) - P^v(\alpha), N(P^v(\alpha))) \geq 0, \quad \alpha \in \Omega\}\,, \tag{61}$$

где оператор $N : R^3 \to R^3$ задан в (51), функция $P^v = (P_1^v, P_2^v, P_3^v) : \ \Omega \to \Delta_\varphi$ опеределена по $v \in M$:

$$P^v(\alpha) = P(\xi(\alpha) + v(\alpha)) \quad \text{для} \quad \alpha \in \Omega, \tag{62}$$

при помощи оператора проектирования P на множество Δ_φ

$$P: \ R^3 \to \Delta_\varphi \, , \, P(x) = \ \arg \min_{z \in \Delta_\varphi} |x - z|.$$

Множество $M(v)$ является выпуклым и замкнутым подмножеством M.

Далее, в этом параграфе, предполагается, что Ω является звездной областью, то есть существует внутренняя точка α^* такая, что для любого единичного вектора $e \in R^2$ выполнено условие:

$$\exists \, t_e > 0 \ : \begin{cases} \alpha^* + te \in \Omega & \text{при} \quad 0 \le t \le t_e, \\ \alpha^* + te \in \Gamma & \text{при} \quad t = t_e, \\ \alpha^* + te \notin \overline{\Omega} & \text{при} \quad t > t_e. \end{cases} \tag{63}$$

Для достаточно малого ε определена функция $\theta_\varepsilon : \ \Omega \to R^1$,

$$\theta_\varepsilon(\alpha) = \theta_\varepsilon(\alpha^* + te) = \begin{cases} \varepsilon & \text{при} \quad 0 \le t \le t_e - \varepsilon, \\ -t + t_e & \text{при} \quad t_e - \varepsilon \le t \le t_e. \end{cases} \tag{64}$$

В предположении компактного вложения пространства V в $\left[C_1(\bar{\Omega})\right]^3$ доказана

Лемма 1. *Пусть последовательность $\{v_n\}$ из M слабо сходится к v в V. Тогда для произвольной функции w из $M(v)$ существует такая константа $\varepsilon_w > 0$, не зависящая от n, что для всякого $\varepsilon \in (\,0, \varepsilon_w\,]$ найдется номер n_ε, начиная с которого выполнено включение $w_\varepsilon \in M(v_n)\,$, где $w_\varepsilon = w + \theta_\varepsilon \, e_3$, $e_3 = (0,0,1)\,$, функция θ_ε определена согласно (64).*

Эта лемма используется при доказательстве следующего результата, позволяющего обосновать сходимость предложенного в § 3 главы 1 итерационного метода для рассматриваемой задачи теории сетчатых мягких оболочек.

Теорема 10. *Пусть последовательность $\{v_n\}$ из M слабо сходится к v в V при $n \to +\infty$. Тогда многозначное отображение $v \to M(v)$ является полунепрерывным снизу, т.е. для произвольной функции w из $M(v)$ найдется такая последовательность $\{w_n\}$, что*

$$w_n \in M(v_n)\,, \quad n = 1,2,3,\ldots, \quad \lim_{n \to +\infty} \|w_n - w\|_V = 0.$$

В § 4 третьей главы рассмотрена задача теории мягких сетчатых оболочек с выпуклым допустимым множеством при наличии следящей поверхностной нагрузки.

Функция φ, описывающая поверхность препятствия, считается выпуклой на всей области её определения:

$$\varphi(\lambda(x_1,x_2) + (1-\lambda)(x_1,x_2)) \le \lambda \, \varphi(x_1,x_2) + (1-\lambda)\varphi(x_1,x_2) \; \forall \, (x_1,x_2) \in R^2, \; \forall \, \lambda \in [0,1],$$

и, таким образом, множество M, определенное с помощью (57), является выпуклым и множество $M(v)$ совпадает с M.

Задача рассматривается при наличии поверхностной нагрузки P интенсивности q^* в случае, когда показатели степенного роста функций, характеризующих физические свойства нитей, удовлетворяют условию $\min\{p_1, p_2\} > 2$.

Обобщенная задача сформулирована следующим образом:

$$\text{найти} \quad u \in M : \ \langle A(u), v-u \rangle - q^* \langle B(u), v-u \rangle \geq \langle f, v-u \rangle \quad \forall\, v \in M, \tag{65}$$

где оператор A и функционал f определены в (59), оператор $B : V \to V^*$ (пространство V задано в (56)) определен формой:

$$\langle Bu, v \rangle = \int\limits_{\Omega} ([\partial_1(u+\xi), \partial_2(u+\xi)], v)\, d\alpha \quad \forall\, u, v \in V.$$

Установлено, что оператор B секвенциально слабо непрерывен, пседомонотонен и ограничен. Эти свойства оператора B, а также установленные ранее свойства оператора A применены для получения критериев разрешимости задачи (65).

В **четвертой** главе проведено построение и обоснование приближенных методов для решения рассмотренных в диссертации задач теории мягких оболочек и теории фильтрации. Доказаны существование решения и сходимость конечномерных аппроксимаций указанных задач, обосновано применение итерационных методов, предложенных в первой главе, для их решения. Приведены результаты численных расчетов для модельных задач, свидетельствующие об эффективности рассмотренных в диссертации приближенных методов.

В § 1 четвертой главы методом конечных элементов построены аппроксимационные задачи для квазивариационных неравенств (60) и (65) с множествами $M \subseteq V$, $M(u)$ определенными, соответственно, в (57) и (61). Область $\Omega \subset R^2$ считается многоугольником. Введены регулярная триангуляция $\mathcal{T}_h$ семейством треугольников K и пространство $\overset{\circ}{X}_h$ равных нулю на границе множества Ω непрерывных кусочно-линейных функций, ассоциируемое с триангуляцией. Определено конечномерное пространство $V_h = \overset{\circ}{X}_h \times \overset{\circ}{X}_h \times \overset{\circ}{X}_h \subset V$ с нормой, введенной в (56).

Множеству $M \subseteq V$, определенному в (57), сопоставлено множество $M_h \subseteq V_h$:

$$M_h = \{v \in V_h : \ \Pi_h\xi_3(\alpha) + v_3(\alpha) \geq F(\Pi_h\xi(\alpha) + v(\alpha)) \ , \ \alpha \in \Omega_h\} , \tag{66}$$

множеству $M(u) \subseteq M$, определенному в (61), сопоставлено множество $M_h(u_h) \subseteq M_h$:

$$M_h(u_h) = \{v \in V_h \ : (\Pi_h\xi_3(\alpha) + v_3(\alpha) - P^{u_h}(\alpha), N(P^{u_h}(\alpha))) \geq 0, \quad \alpha \in \Omega_h\} , \tag{67}$$

где $\Omega_h = \left\{\alpha_l \in \overline{\Omega} \ , \ l = 1, 2, \ldots, N_h\right\}$ – множество вершин треугольников K из $\mathcal{T}_h$, $\Pi_h\xi(x_l) = \xi(x_l)$, $l = 1, 2, \ldots, N_h$ – интерполянт функции $\xi \in [C(\Omega)]^3$.

Установлено, что многозначное отображение $u_h \in M_h : u_h \to M_h(u_h)$ является полунепрерывным снизу.

Задаче (60) поставлена в соответствие аппроксимирующая задача:

$$\text{Найти} \quad u_h \in M_h \ : \ \langle Au_h, v_h - u_h \rangle \geq \langle f, v_h - u_h \rangle \ , \ \forall v_h \in M_h(u_h). \tag{68}$$

Установлена ограниченная липшиц-непрерывность (см. определение (14)) оператора A, определенного в (59).

Для решения задачи (68) рассмотрен следующий итерационный процесс:

Пусть $u_h^{(0)}$ – произвольный элемент из M_h. Для $k = 0, 1, 2, \ldots$, определим $u_h^{(k+1)} \in M_h(u_h^{(k)})$ как решение вариационного неравенства:

$$\langle J(u_h^{(k+1)} - u_h^{(k)}), v - u_h^{(k+1)}\rangle \geq \tau\langle f - Au_h^{(k)}, v - u_h^{(k+1)}\rangle \quad \forall\, v \in M_h(u_h^{(k)}), \tag{69}$$

где $\tau > 0$ итерационный параметр, $J : V \to V^*$ - оператор двойственности, порождаемый функцией Ψ из определения (14).

Исследована сходимость итерационного процесса (69): на основании теоремы 8 установлено, что все предельные точки u_h итерационной последовательности $\left\{u_h^{(k)}\right\}_{k=1}^{+\infty}$ являются решениями квазивариационного неравенства (68).

Далее доказано, что если оператор A в задаче (60) – псевдомонотонный, а последовательность $\{u_{h_i}\}_{i=1}^{+\infty}$ решений задачи (68) слабо сходится к u^* в V, то при $h_i \to 0$ ее предел является решением задачи (60); установлена равномерная ограниченность по h в пространстве V множества u_h решений задачи (68). На основании этих резульатов доказана сходимость конечномерных решений u_h к решению задачи (60) при $h \to 0$. Затем рассмотрен случай, когда правая часть и решение задачи (60) обладают дополнительной гладкостью. Доказано, что если решение u задачи (60) и правая часть f удовлетворяют условиям $u \in [W_p^{(2)}(\Omega)]^3$, $(f - Au) \in \mathrm{L}_p^*$, то выполнена (множество M предполагается выпуклым и $M(u) = M$) оценка:

$$\sum_{k=1}^{2} \|T_k(\xi + u) - T_k(\Pi_h\xi + u_h)\|_{\mathrm{L}_q} \leqslant Ch\,, \text{ где } T_k(w) = \frac{t_k(|\partial_k(w)|/g_k)}{|\partial_k(w)|}\rho_k g_{k^*}\partial_k(w),$$

где $p = \min\{p_1, p_2\} > 2$, $q = p/(p-1)$, через L_p^* обозначено пространство, сопряженное к $\mathrm{L}_p = [L_p(\Omega)]^3$, а поле $T_k(w)$ – это усилия в нитях k-го семейства деформированной поверхности w.

В § 2 четвертой главы предложенные в настоящей диссертации итерационные методы применены для численного решения модельной задачи об определении положения равновесия бесконечно длинной цилиндрической оболочки, находящейся под воздействием следящей поверхностной нагрузки и ограниченной в перемещениях препятствием. Эта задача сводится к "одномерной" ($\Omega = [0, 1]$) в плоскости сечения. Следует отметить, что данная задача интересна с той точки зрения, что она отражает основные особенности рассматриваемых в диссертации задач с препятствием. В ряде случаев построены точные решения, что оказалось весьма полезным при оценке эффективности предложенных в диссертации приближенных методов.

Обобщенная задача сформулирована в виде неравенства (60) с псевдомонотонным и потенциальным оператором $A : V \to V^*$, $A \equiv T + q^*B$ и множеством допустимых конфигураций M, задаваемых соотношениями

$$\langle Tu, v\rangle = \int_0^1 \frac{t(|e_1 + u'|)}{|e_1 + u'|}(e_1 + u', v')ds\,,\ \langle Bu, v\rangle = \int_0^1 (u_1' + 1)v_2 - u_2' v_1 ds\,,\ e_1 = (1, 0),$$

$$M = \{v \in V: \ v_2(s) \geq \varphi(s + v_1(s), v_2(s)) \ s \in [0,1]\} \ , V = \left[\overset{\circ}{W}{}^1_p \, ([0,1])\right]^2,$$

где функция $w = (w_1, w_2)$ описывает поперечное сечение оболочки в деформированном состоянии (начальное состояни $\xi(s) = se_1$, $s \in [0,1]$), функция $t : R_+ \to R_+$ характеризует физические свойства оболочки, функция $\varphi : R^1 \to R^1$ описывает границу препятствия в R^2. Постоянная q^* задает интенсивность следящей нагрузки, массовые силы отсутствуют ($f \equiv 0$). Множество допустимых направлений $M(v)$ определено по аналогии с (61) в "плоском" варианте.

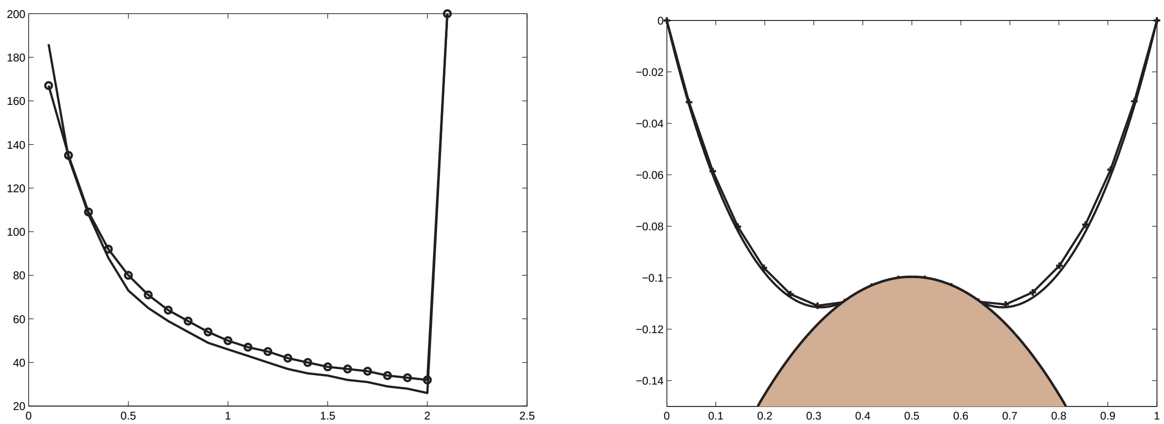

Рис. 1. a) Зависимомть числа итераций от τ b) Задача с выпуклым препятствием

Для описанной задачи в случае, когда $t(\lambda) = (\lambda - 1)^+$ (таким образом $p = 2$), проведены численные рассчеты. Аппроксимация осуществлена по "одномерному" аналогу (X_h – пространство непрерывных кусочно-линейных на отрезке $[0,1]$ функций) схемы, описанной в (66)–(68). Конечномерная задача решалась итерационным методом (69), критерий выхода – достижение заданной точности нормы разности соседних итераций. Наблюдалось, в частности, что количество итераций, необходимых для достижения заданной точности, практически не зависит от числа узлов сетки. Характерная зависимость числа итераций от итерационного параметра τ приведена на графике 1a. Сплошная линия соответствует случаю "плоского" препятствия ($\varphi \equiv \mathrm{const}$), линия с кружками – задаче с выпуклым препятствием. На рисунке 1b сплошной линией изображено точное решение задачи с выпуклым препятствием, кусочно-линейной – приближенное. На рисунке 2a сплошной линией изображена зависимость погрешности от числа узлов сетки, линией с кружками – зависимость от числа узлов сетки расстояния между границей коинцидентного множества $I(w)$ (см. 49) и ближашим узлом сетки вне $I(w)$. Анализ приведенных зависимостей, в частности, подтверждает известный факт о том, что в односторонних задачах построение сеток должно учитывать особенности, возникающие в районе границы коинцидентного множества. Наблюдается хорошее совпадение точного и приближенного решения. Это свидетельствует об эффективности предложенных в диссертации приближенных методов решения стационарных задач теории мягких сетчатых оболочек.

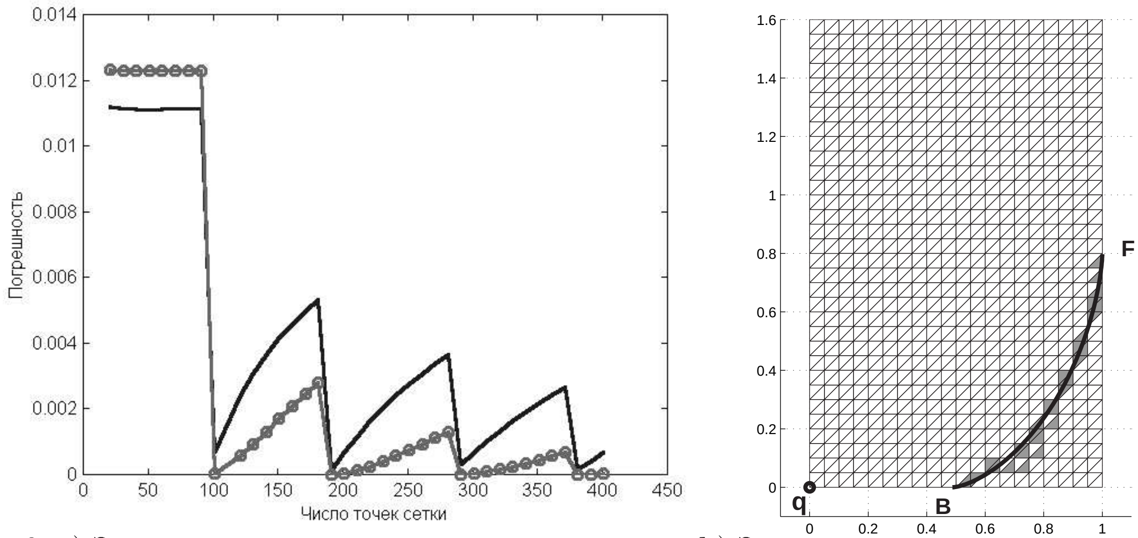

Рис. 2. **a**) Зависимость погрешности от числа узлов **b**) Закон с предельным градиентом

В § 3 четвертой главы проведено построение конечноэлементных аппроксимаций задачи фильтрации (45) с использованием регулярной триангуляции. При этом аппроксимирующее пространство построено на основе треугольных конечных элементов первого порядка. Доказаны теоремы существования решения конечномерных задач, теоремы сходимости итерационных методов для их решения. В случае сильной монотонности оператора A из неравенства (45) (это свойство выполняется, когда в законе фильтрации (38) константы s_0, s^* из (20), (21) равны нулю) и дополнительной гладкости решения ($u \in W_2^{(2)}(\Omega)$), получена оценка точности $\|u - u_h\|_V = O\left(h^{1/2}\right)$, аналогичная оценкам, имеющимся для задач фильтрации с более гладкой, чем в настоящей диссертации, правой частью.

В § 4 четвертой главы проведено численное моделирование некоторых модельных задач фильтрации и сравнение приближенных решений с аналитически построенными характеристиками точных решений, известными из литературы. В частности, рассмотрена задача о цепочке равноудаленных скважин, расположенных на одной прямой с известным расходом q и многозначным законом фильтрации следующего вида:

$$\bar{g}(s) = \begin{cases} \lambda s, & s < 1, \\ [\lambda, 1], & s = 1, \\ s, & s > 1, \end{cases} \qquad 0 \le \lambda < 1. \tag{70}$$

Приближенное решение указанной задачи фильтрации сводится к следующей краевой задаче (считается, что выполнено условие $Z >> 1$): уравнение (18) на области $\Omega = \{(x, y) \in R^2 : 0 \le x \le 1\,, 0 \le y \le Z\}$ с источником интенсивности $q/4$ в начале координат, с многозначным законом (37), (70) и краевыми условиями (29), где $\Gamma_1 = \{0 \le x \le 1\,, y = Z\}$, $\Gamma_2 = \{x = 0\,, 0 \le y \le Z\} \bigcup \{0 \le x \le 1\,, y = 0\} \bigcup \{x = 1\,, 0 \le y \le Z\}$. Аппроксимация этой краевой задачи построена в соответствии со схемой, изложенной в § 3. Полученные конечномерные задачи решались итерационным

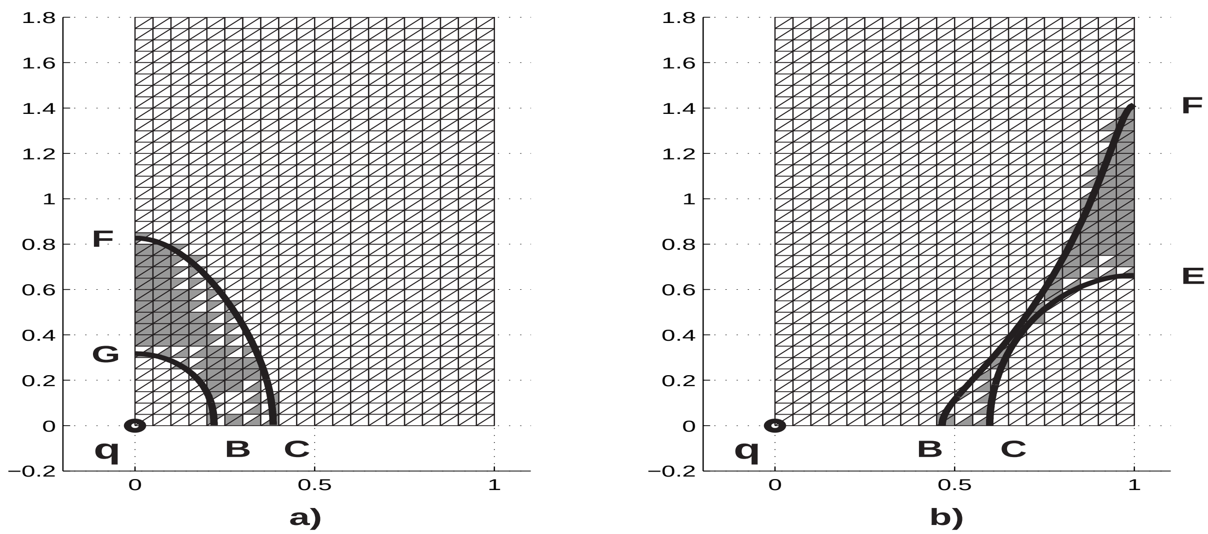

Рис. 3. Многозначный закон **a**) $q/4 \le \lambda$ **b**) $q/4 \ge 1$

методом (1) с $H = Y \equiv [L_2(\Omega)]^n$(см. определение (42)). При этом решение задачи (2) (в силу того, что $F \equiv 0$) свелось к решению сеточного уравнения Лапласа с соответствующими краевыми условиями, а решение задачи (3) реализовано по формуле: $y^{(k+1)} = \nabla\Psi^*(r\Lambda u^{(k+1)} + \lambda^{(k)})$, где Ψ^* – функционал, сопряженный к функционалу $\Psi(\cdot) = r/2\,\|\cdot\|_V^2 + \Phi(\cdot)$ (для рассматриваемой задачи получен явный вид градиента $\nabla\Psi^*$).

На рисунке 2b приведены результаты расчетов для закона (70) с $\lambda = 0$, что соответствует многозначному закону фильтрации с предельным градиентом ($s_0 = 1, s^* = 0, k = 1, L = 1, \beta = 1, \theta = 1$ в (37)), при этом оператор A является обратно сильно монотонным с $\sigma = 1$. На рисунке приведена триангуляция (задача решалась в области Ω с $Z = 10$), причем серым цветом закрашены элементы, на которых $|\nabla u_h| = \beta$, а линия BF (на которой $|\nabla u| = \beta$) построена по известным аналитическим формулам для задачи о скважинах.

На рисунках 3a и 3b приведены результаты расчетов для закона (70) с $\lambda = 0.5$, что соответствует задаче (18) с сильно монотонным оператором. Темным цветом закрашены элементы, на которых $|\nabla u_h| = \beta$, а сплошные линии, построенные по известным аналитическим формулам, ограничивают область, где $|\nabla u| = \beta$.

Расчеты показали, что оптимальным (в смысле количества итераций) является значение $r = 1$, при этом оптимальное значение τ практически не зависит от числа узлов сетки.

В результате проведенных численных экспериментов подтверждена эффективность предложенных приближенных методов решения задач фильтрации.

Список основных публикаций.

1. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Задворнов О.А. О численном решении одномерных задач теории мягких оболочек // Сеточные методы для краевых задач и приложения. Материалы 4-го Всеросс. сем. - Казань: Изд-во Казанского математического общества, 2002. - С. 17-18.

2. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Задворнов О.А. Исследование задачи о контакте нити с препятствием // Исследования по прикладной математике и информатике. - Казань: Изд-во Казанского госуниверситета, 2003. - Вып. 24. - С. 3-11.

3. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Задворнов О.А. Постановка и численное исследование стационарной задачи о контакте мягкой оболочки с препятствием // Труды международной конференции по вычислительной математике МКВМ -2004. Ч. I . - Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2004. - С. 390-395.

4. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Задворнов О.А. Постановка и численное исследование осесимметричной задачи о равновесии мягкой оболочки вращения// Исследования по прикладной математике и информатике. - Казань: Казанский государственный университет, 2004. - Вып. 25. - С. 11-33.

5. Бадриев И.Б., Задворнов О.А. Исследование разрешимости стационарных задач для сетчатых оболочек// Известия ВУЗов. Математика. - 1992. - N 11. - С. 3-7.

6. Бадриев И.Б., Задворнов О.А. Исследование сходимости итерационного процесса для уравнений с вырождающимися операторами// Дифференциальные уравнения. - 1996. - Т. 32. - N 7. - С. 898-901.

7. Бадриев И.Б., Задворнов О.А. О сильной сходимости итерационного метода для операторов с вырождением// Журнал вычисл. математики и матем. физики. - 1997. - Т. 37. - N 12. - С. 1424-1426.

8. Бадриев И.Б., Задворнов О.А., Саддек А.М. Исследование сходимости итерационных методов решения некоторых вариационных неравенств с псевдомонотонными операторами// Дифференциальные уравнения. - 2001. - Т. 37. - N 7. - С. 891-898.

9. Бадриев И.Б., Задворнов О.А. Построение и исследование сходимости итерационных методов решения вариационных задач с недифференцируемым функционалом // Дифференциальные уравнения - 2002. - Т. 38. - N 7. - С. 930-935.

10. Бадриев И.Б., Задворнов О.А. О решении вариационных неравенств второго рода с обратно сильно монотонными операторами // Сеточные методы для краевых задач и приложения. Материалы 4-го Всеросс. сем. Казань: Изд-во Казанского математического общества, 2002. - С. 18-22.

11. Бадриев И.Б., Задворнов О.А. Итерационные методы решения вариационных неравенств второго рода с обратно сильно монотонными операторами// Известия ВУЗов. Математика. - 2003. - N 1. - С. 20-28.

12. Бадриев И.Б., Задворнов О.А. Методы декомпозиции для решения вариационных неравенств второго рода с обратно сильно монотонными операторами// Дифференциальные уравнения. - 2003. - Т. 39. - N 7. - С. 888-895.

13. Бадриев И.Б., Задворнов О.А. Исследование разрешимости осесимметрич-

ной задачи об определении положения равновесия мягкой оболочки вращения// Известия ВУЗов. Математика. - 2005. - N 1. - С. 12-18.

14. Бадриев И.Б., Задворнов О.А. Исследование стационарной задачи фильтрации с многозначным законом при наличии точечного источника// Дифференциальные уравнения. - 2005. - Т. 41. - N 7. - С. 874-880.

15. Бадриев И.Б., Задворнов О.А. О сходимости итерационного метода двойственного типа решения смешанных вариационных неравенств // Дифференциальные уравнения. - 2006. - Т. 42. - N 8. - С. 1115-1122.

16. Бадриев И.Б., Задворнов О.А., Исмагилов Л.Н. Применение метода декомпозиции для численного решения некоторых нелинейных стационарных задач теории фильтрации // Исследования по прикладной математике и информатике. - Казань: Казанский государственный университет, 2003. - Вып. 24. - С. 12-24.

17. Бадриев И.Б., Задворнов О.А., Исмагилов Л.Н. Численное решение задачи о целиках остаточной вязкопластичной нефти // Современные методы теории краевых задач. Материалы Воронежской весенней матем. школы "Понтрягинские чтения - XV". (3-9 мая 2004 г.). - Воронеж: Изд-во Воронежского госуниверситета, 2004. - С. 20-21.

18. Бадриев И.Б., Задворнов О.А., Исмагилов Л.Н. Численное решение вариационных неравенств, возникающих при описании процессов фильтрации // Сеточные методы для краевых задач и приложения. Матер. 5-го Всеросс. семинара. - Казань: Казанский государственный университет, 2004. - С. 24-25.

19. Бадриев И.Б., Задворнов О.А., Исмагилов Л.Н. Численное исследование вариационных неравенств теории стационарной фильтрации // Труды Средневолжского математического общества. - 2006. - Т. 8. - N 2. - С. 62-66.

20. Бадриев И.Б., Задворнов О.А., Исмагилов Л.Н., Скворцов Э.В. Решение задач об определении предельно равновесных целиков остаточной вязко - пластической нефти// Исследования по прикладной математике и информатике. - Казань: Казанский государственный университет, 2004. - Вып. 25. - С. 33-48.

21. Бадриев И.Б., Задворнов О.А., Ляшко А.Д. Итерационные методы решения вариационных неравенств второго рода с потенциальными операторами монотонного типа // Труды международной конференции по вычислительной математике МКВМ -2004. Ч. I. – Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2004. - С. 3-8.

22. Бадриев И.Б., Задворнов О.А., Ляшко А.Д. Исследование итерационных методов с переменным шагом для решения вариационных неравенств второго рода// Дифференциальные уравнения. - 2004. - Т. 40. - N 7. - С. 908-919.

23. Задворнов О.А. О стационарных задачах контакта мягкой оболочки с препятствием // Сеточные методы для краевых задач и приложения. Материалы Четвертого Всероссийского семинара. - Казань: Изд-во Казанского математического общества, 2002. - С. 55-61.

24. Задворнов О.А. Постановка и исследование стационарной задачи о контакте мягкой оболочки с препятствием// Известия ВУЗов. Математика. - 2003. - N 1. - С. 45-52.

25. Задворнов О.А. Математическое моделирование задач о контакте мягких оболочек с препятствием // Актуальные проблемы прикладной математики и механики. Тезисы докладов Всеросс. конф., посвященной 70-летию со дня рожд. акад. А.Ф.Сидорова (Екатеринбург, 3-7 февраля 2003 г.). - Екатеринбург: Изд-во ИММ УРО РАН, 2003. - С. 36-37.

26. Задворнов О.А. Математическое моделирование задач о контакте мягких оболочек с препятствием //Тезисы докладов Двенадцатой Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным системам, Владимир, 30 июня - 5 июля 2003 г. - М.: Изд-во МАИ, 2003. - С. 280 - 281.

27. Задворнов О.А. О сходимости итерационного метода решения квазивариационного неравенства // Сеточные методы для краевых задач и приложения. Материалы Пятого Всероссийского семинара. - Казань: Казанский государственный университет, 2004. - С. 71-75.

28. Задворнов О.А. О формулировке обобщенной задачи теории фильтрации при наличии точечного источника // Труды Математического центра им. Н.И.Лобачевского. Т. 25. Материалы международной научной конференции “Актуальные проблемы математики и механики”. - Казань: Изд-во Казанского математического общества, 2004. - С. 119.

29. Задворнов О.А. Исследование нелинейной стационарной задачи фильтрации при наличии точечного источника// Известия ВУЗов. Математика. - 2005. - N 1. - С. 58-63.

30. Задворнов О.А. Приближенное решение квазивариационных неравенств, описывающих контактные задачи теории мягких оболочек// Материалы XIV Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам, Алушта, Крым, 25-31 мая 2005 г. - М: Вузовская книга, 2005. - С. 180-181

31. Задворнов О.А. О сходимости полуявного метода с расщеплением для решения вариационных неравенств второго рода // Известия ВУЗов. Математика. - 2005. - N 6. - С. 61-70

32. Задворнов О.А. Исследование итерационного метода решения квазивариационного неравенства с потенциальным оператором// Сеточные методы для краевых задач и приложения. Материалы 6-го Всероссийского семинара. - Казань: Казанский государственный университет, 2005. - С. 86-91.